



PROGRAMMA di MATEMATICA
CLASSE 4E SCIENZE APPLICATE a.s. 2023/ 2024

SIMMETRIE, TRASLAZIONI E DILATAZIONI NEL PIANO CARTESIANO

Le trasformazioni geometriche e il concetto di isometria.

La simmetria centrale: definizione euclidea, elementi uniti, equazione cartesiana diretta e inversa (con dimostrazione).

Il punto simmetrico di un altro punto rispetto ad un punto detto centro di simmetria.

La curva simmetrica di una curva assegnata rispetto ad un punto detto centro di simmetria.

La simmetria assiale: definizione euclidea, elementi uniti, equazione cartesiana diretta e inversa nei casi di assi di simmetria coincidenti con gli assi cartesiani, paralleli agli assi cartesiani o coincidenti con le bisettrici dei quadranti (con dimostrazione).

La curva simmetrica di una curva assegnata rispetto ad una retta detta asse di simmetria.

La rotazione attorno all'origine di un angolo retto: definizione euclidea, elementi uniti, equazione cartesiana diretta e inversa nel caso di rotazioni orarie o antiorarie (con dimostrazione).

La traslazione di vettore assegnato: definizione euclidea, elementi uniti, equazione cartesiana diretta e inversa (con dimostrazione).

La curva traslata di una curva assegnata rispetto ad un vettore dato.

Determinazione del centro di simmetria o dell'asse di simmetria di una curva di cui è nota l'equazione cartesiana.

Le trasformazioni non isometriche e il cambiamento di scala lungo gli assi cartesiani.

La dilatazione di centro l'origine e rapporti h, k non nulli: definizione e equazione cartesiana diretta e inversa (con dimostrazione).

Il caso particolare delle dilatazioni verticali e orizzontali.

L'omotetia di centro l'origine e rapporto h non nullo: definizione e equazione cartesiana diretta e inversa (con dimostrazione).

Principali proprietà delle omotetie.

La simmetria rispetto all'asse x e i grafici di funzioni deducibili: funzione opposta e funzione valore assoluto.

La simmetria rispetto all'asse y e i grafici deducibili.

La traslazione di vettore v e i grafici deducibili: funzione traslata verticalmente e orizzontalmente.

La dilatazione di centro l'origine e rapporti h, k non nulli e i grafici deducibili: funzioni dilatate verticalmente e orizzontalmente.

Applicazione delle trasformazioni geometriche alla costruzione dei grafici di funzioni deducibili da funzioni elementari note.

Applicazione delle trasformazioni geometriche allo studio di funzioni goniometriche, deducibili dalle funzioni goniometriche elementari, alla ricerca degli zeri e alla determinazione del periodo.

RETTA, PARABOLA E CIRCONFERENZA NEL PIANO CARTESIANO

Richiami sui concetti chiave di una funzione reale di variabile reale: definizione, dominio, codominio, immagine e classificazione.

Le funzioni lineari come funzioni algebriche razionali intere di primo grado: dominio, immagine e rappresentazione grafica.

Parabole con asse parallelo all'asse delle ordinate e funzioni algebriche intere razionali di secondo grado: dominio, immagine e rappresentazione grafica.

Archi di parabole con asse parallelo all'asse delle ascisse e funzioni algebriche intere irrazionali di indice pari: dominio, immagine e rappresentazione grafica.

Semicirconferenze e funzioni algebriche intere irrazionali di indice pari: dominio, immagine e rappresentazione grafica.

Risoluzione algebrica e risoluzione grafica di equazioni e disequazioni irrazionali.

Grafici di funzioni e tratti contenenti termini in valore assoluto in cui compaiono funzioni lineari e/o archi di parabole e/o semicirconferenze.

L'ELLISSE NEL PIANO CARTESIANO

L'ellisse come luogo geometrico e le sue caratteristiche: vertici, fuochi, assi di simmetria, centro di simmetria.

L'equazione di un'ellisse avente centro nell'origine degli assi e fuochi sull'asse delle x (con dimostrazione dalla definizione di luogo geometrico) e studio analitico del grafico corrispondente.

L'equazione di un'ellisse avente centro nell'origine degli assi e fuochi sull'asse delle y (con dimostrazione dalla definizione di luogo geometrico) e studio analitico del grafico corrispondente.

La rappresentazione grafica di un'ellisse nota la sua equazione.

L'eccentricità di un'ellisse.

L'ellisse e le dilatazioni e la determinazione di un'ellisse come trasformata della circonferenza centrata nell'origine di raggio unitario.

Area della regione racchiusa da un'ellisse (con dimostrazione).

Posizioni reciproche tra una retta e un'ellisse: rette esterne, rette tangenti e rette secanti.

La condizione di tangenza e la formula di sdoppiamento.

Determinazione delle equazioni delle rette tangenti ad un'ellisse condotte da un punto esterno.

Determinazione dell'equazione della retta tangente ad un'ellisse condotta da un suo punto.

Determinazione dell'equazione di una retta tangente ad un'ellisse nota la sua direzione.

L'ellisse e le traslazioni e la determinazione di un'ellisse traslata con centro diverso dall'origine degli assi.

La determinazione dell'equazione di un'ellisse note alcune condizioni: passaggio per due punti, coordinate di fuochi e un vertice, coordinate di un vertice e eccentricità, coordinate dei fuochi e eccentricità, condizione di tangenza e un'altra condizione qualsiasi.

La determinazione dell'equazione di un'ellisse traslata, con gli assi paralleli agli assi cartesiani, note alcune condizioni.

Semiellissi e funzioni algebriche intere irrazionali di indice pari: dominio, immagine e rappresentazione grafica.

Interpretazione grafica di equazioni e disequazioni irrazionali.

Attività di Problem Solving sulla determinazione di particolari punti di un'ellisse che soddisfano specifiche proprietà assegnate, su ellissi parametriche, su problemi geometrici aventi come modello la determinazione e la rappresentazione grafica di funzioni irrazionali intere di indice due e intersezioni fra ellissi e rette.

L'IPERBOLE NEL PIANO CARTESIANO

L'iperbole come luogo geometrico e le sue caratteristiche: vertici reali e immaginari, fuochi, assi di simmetria trasverso e non trasverso, centro di simmetria.

L'equazione di un'iperbole avente centro nell'origine degli assi e fuochi sull'asse delle x (con dimostrazione dalla definizione di luogo geometrico) e studio analitico del grafico corrispondente.

L'equazione di un'iperbole avente centro nell'origine degli assi e fuochi sull'asse delle y (con dimostrazione dalla definizione di luogo geometrico) e studio analitico del grafico corrispondente.

La rappresentazione grafica di un'iperbole nota la sua equazione.

L'eccentricità di un'iperbole e le equazioni dei suoi asintoti.

L'iperbole equilatera riferita ai propri assi: equazione e studio delle principali caratteristiche.

L'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti: equazione e studio delle principali caratteristiche.

La funzione omografica: equazione e studio delle principali caratteristiche.

Posizioni reciproche tra una retta e un'iperbole: rette esterne, rette tangenti e rette secanti.

La condizione di tangenza e la formula di sdoppiamento.

Determinazione delle equazioni delle rette tangenti ad un'iperbole condotte da un punto esterno.

Determinazione dell'equazione della retta tangente ad un'iperbole condotta da un suo punto.

Determinazione dell'equazione di una retta tangente ad un'iperbole nota la sua direzione.

La determinazione dell'equazione di un'iperbole note alcune condizioni.

La determinazione dell'equazione di un'iperbole traslata note alcune condizioni.

Semi-iperboli e funzioni algebriche intere irrazionali di indice pari: dominio, immagine e rappresentazione grafica.

Interpretazione grafica di equazioni e disequazioni irrazionali.

Attività di Problem Solving sulla determinazione di particolari punti di un'iperbole che soddisfano specifiche proprietà assegnate, su iperboli parametriche, su problemi geometrici aventi come modello la determinazione e la rappresentazione grafica di funzioni irrazionali intere di indice due e intersezioni fra iperboli e rette.

FUNZIONI, EQUAZIONI E DISEQUAZIONI ESPONENZIALI

Richiami sulle potenze a esponente intero e razionale.

Funzioni esponenziali: definizione e analisi di situazioni reali che abbiano come modello funzioni esponenziali.

Il grafico di una funzione esponenziale con base maggiore di 1: caratteristiche e proprietà.

Il grafico di una funzione esponenziale con base compresa tra 0 e 1: caratteristiche e proprietà.

La simmetria rispetto all'asse y di funzioni esponenziali con basi reciproche.

Stretta crescita e decrescita di una funzione esponenziale.

Modelli esponenziali e problemi tratti dalla realtà.

Il dominio di una funzione esponenziale e relativa interpretazione grafica.

Grafici delle funzioni esponenziali elementari e grafici deducibili da funzioni elementari mediante opportune trasformazioni geometriche: dominio, immagine e asintoti.

Equazioni esponenziali elementari.

Equazioni esponenziali composte risolubili mediante l'applicazione delle proprietà delle potenze.

Equazioni esponenziali riconducibili a equazioni elementari mediante l'utilizzo di una variabile ausiliaria.

Equazioni esponenziali risolubili mediante scomposizioni.

Risoluzione grafica delle equazioni esponenziali.

Sistemi di due equazioni esponenziali in due incognite.

Disequazioni esponenziali e corretta interpretazione della stretta crescita e decrescita delle funzioni esponenziali.

Disequazioni esponenziali elementari.

Disequazioni esponenziali composte risolubili mediante l'applicazione delle proprietà delle potenze.

Disequazioni esponenziali riconducibili a disequazioni elementari mediante l'utilizzo di una variabile ausiliaria.

Disequazioni esponenziali risolubili mediante scomposizioni.

Risoluzione grafica delle disequazioni esponenziali.

Modelli esponenziali e problemi tratti dalla realtà.

FUNZIONI, EQUAZIONI E DISEQUAZIONI LOGARITMICHE

Definizione di logaritmo a partire dall'esistenza e dall'unicità della soluzione di un'equazione esponenziale elementare.

Calcolo di logaritmi in base alla definizione.

Le proprietà dei logaritmi e loro applicazioni: prodotto, potenza, quoziente, reciproco, radice n -esima, formula del cambiamento di base.

Funzioni logaritmiche: definizione e analisi di situazioni reali che abbiano come modello funzioni logaritmiche.

Il grafico di una funzione logaritmica con base maggiore di 1: caratteristiche e proprietà.

Il grafico di una funzione logaritmica con base compresa tra 0 e 1: caratteristiche e proprietà.

La funzione logaritmica come funzione inversa della funzione esponenziale e la simmetria rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

Stretta crescita e decrescita di una funzione logaritmica.

Il dominio di una funzione logaritmica e relativa interpretazione grafica.

Grafici delle funzioni logaritmiche elementari e grafici deducibili da funzioni elementari mediante opportune trasformazioni geometriche: dominio, immagine e asintoti.

Studio per passi di funzioni esponenziali e logaritmiche: dominio, intersezioni con gli assi, studio del segno.

Equazioni logaritmiche elementari.

Equazioni logaritmiche composte risolubili mediante l'applicazione delle proprietà dei logaritmi.

Risoluzione grafica delle equazioni logaritmiche.

Equazioni e disequazioni esponenziali risolubili mediante logaritmi.

Disequazioni logaritmiche e risoluzione grafica delle disequazioni logaritmiche.

Modelli logaritmici e problemi tratti dalla realtà.

INTRODUZIONE ALL'ANALISI E FUNZIONI

Funzioni reali di variabile reale.

Riepilogo dei grafici delle principali funzioni elementari e della loro classificazione.

Determinazione del dominio e studio del segno di una funzione: condizione e procedimento algebrico e interpretazione grafica.

L'immagine di una funzione.

Massimo e minimo, estremo superiore e estremo inferiore di una funzione.

Funzioni limitate, superiormente e/o inferiormente, e funzioni illimitate.

Funzioni crescenti e funzioni decrescenti, in senso stretto o in senso lato, e funzioni monotone.

Funzioni pari, funzioni dispari, funzioni né pari né dispari, funzioni periodiche.

Studio per passi di una funzione: calcolo del dominio, determinazione di eventuali simmetrie, punti di intersezione con gli assi cartesiani, studio del segno, interpretazione grafica e costruzione del grafico associato.

Funzioni e funzioni inverse: simmetria grafica e determinazione algebrica.

La condizione di invertibilità di una funzione in relazione alla stretta crescita e/o decrescenza e l'eventuale restrizione del dominio per garantirne l'invertibilità.

L'operazione di composizione e la funzione composta.

LIMITI DI FUNZIONI REALI DI VARIABILE REALE

Esempi introduttivi al concetto di limite.

Intorno circolare di un punto, intorno destro di un punto, intorno sinistro di un punto, intorno di infinito.

Punti di accumulazione e punti isolati.

L'intorno come concetto di distanza.

Definizioni rigorose di limite mediante la definizione di intorno: limite finito al finito, finito all'infinito, infinito al finito e infinito all'infinito.

Limite destro e limite sinistro.

Asintoti verticali e asintoti orizzontali.

Introduzione all'algebra dei limiti e alle forme di indecisione o forme indeterminate: $0/0$, ∞/∞ , $\infty-\infty$.

GEOMETRIA EUCLIDEA E ANALITICA NELLO SPAZIO

Primi assiomi di geometria dello spazio.

Posizioni reciproche di due rette, di una retta e un piano e di due piani nello spazio.

Figure nello spazio.

Perpendicolarità fra retta e piano e fra due rette nello spazio, diedri e perpendicolarità fra due piani nello spazio.

Parallelismo fra retta e piano, fra piani e fra due rette nello spazio.

Proiezioni, distanze e angoli nello spazio.

Il sistema di riferimento cartesiano ortogonale nello spazio: definizioni e elementi caratteristici.

La distanza tra due punti nello spazio e il punto medio di un segmento nello spazio.

Vettori nel piano e nello spazio: analogie e differenze.

I versori degli assi cartesiani e loro applicazione nella scrittura delle componenti cartesiane di un vettore.

Il modulo di un vettore nello spazio.

Operazioni fra vettori nello spazio: somma e differenza, moltiplicazione per uno scalare, prodotto vettoriale e prodotto scalare.

Parallelismo e perpendicolarità fra due vettori nello spazio in funzione della proporzionalità fra le componenti cartesiane e del prodotto scalare.

L'equazione di un piano nello spazio passante per un punto e di dato vettore normale n (con dimostrazione).

Analisi dei casi particolari: piano passante per l'origine degli assi, piano parallelo ad un asse coordinato, piano parallelo ad uno dei piani coordinati.

Condizioni di parallelismo e di perpendicolarità tra due piani in funzione delle posizioni reciproche dei corrispondenti vettori normali.

Posizioni reciproche fra piani: piani paralleli distinti, piani secanti, piani paralleli coincidenti.

L'equazione parametrica di una retta nello spazio passante per un punto e di dato vettore direzione (con dimostrazione).

L'equazione cartesiana di una retta nello spazio passante per un punto e di dato vettore direzione (con dimostrazione).

Condizioni di parallelismo e di perpendicolarità fra due rette e fra una retta e un piano e loro posizione reciproca dall'analisi dei corrispondenti vettori direzione e normali.

Piani incidenti e determinazione della retta individuata da due piani.

La distanza di un punto da un piano (in analogia con la distanza punto - retta nel piano cartesiano).

La distanza di un punto da una retta.

L'equazione di una superficie sferica dati il centro e il raggio (a partire dalla definizione di superficie sferica come luogo geometrico dei punti dello spazio).

L'equazione di una superficie sferica in forma cartesiana e la condizione affinché un'equazione rappresenti una superficie sferica reale, eventualmente degenerare.

La sfera e la disequazione che la individua.

L'equazione del piano tangente ad una superficie sferica in un suo punto dato.

FORMULE GONIOMETRICHE E FUNZIONI

Richiami sulle formule di addizione e sottrazione, duplicazione e bisezione di seno e coseno di un angolo.

Funzioni lineari in seno e coseno di equazione $y = a \sin x + b \cos x + c$ e la sua trasformazione nell'equazione di una funzione sinusoidale in cui riconoscere l'applicazione delle opportune trasformazioni geometriche.

EQUAZIONI E DISEQUAZIONI GONIOMETRICHE

Equazioni goniometriche elementari in seno, coseno, tangente e cotangente: procedimento risolutivo, determinazione grafica delle soluzioni e scrittura specifica con relativa periodicità.

Equazioni impossibili.

Equazioni e funzioni: interpretazione grafica delle soluzioni di un'equazione goniometrica.

Equazioni goniometriche composte in seno, coseno, tangente e cotangente: variabili ausiliarie e archi associati.

Equazioni di secondo grado in seno, coseno, tangente e cotangente complete e incomplete: procedimento risolutivo, determinazione grafica delle soluzioni e scrittura specifica con relativa periodicità, eventuali condizioni d'esistenza e studio dell'accettabilità delle soluzioni trovate.

Equazioni goniometriche riconducibili ad equazioni elementari mediante l'utilizzo di archi associati, relazioni fondamentali e formule goniometriche.

Equazioni lineari in seno e coseno e interpretazione grafica.

Equazioni goniometriche omogenee di secondo grado in seno e coseno e riconducibili ad esse.

Attività di Problem Solving interdisciplinare: equazioni goniometriche e geometria analitica.

Disequazioni goniometriche elementari, disequazioni goniometriche composte (variabile ausiliaria), disequazioni di secondo grado, disequazioni riconducibili a disequazioni di secondo grado mediante l'applicazione di formule goniometriche, disequazioni frazionarie e disequazioni prodotto.

Procedimento risolutivo utilizzando la circonferenza goniometrica, corretta scrittura dell'intervallo soluzione, analisi di disequazioni impossibili o sempre verificate.

Disequazioni goniometriche frazionarie, lineari in seno e coseno, omogenee di secondo grado in seno e coseno.

Valori assoluti, irrazionali e sistemi con disequazioni goniometriche.

Disequazioni goniometriche contenenti valori assoluti, disequazioni goniometriche irrazionali, sistemi di disequazioni goniometriche: procedimento risolutivo, discussione algebrica, rappresentazione grafica delle tabelle corrispondenti direttamente sulla circonferenza goniometrica. Equazioni, disequazioni goniometriche e funzioni con parametro. Applicazione delle equazioni e delle disequazioni goniometriche alla determinazione del dominio di una funzione e relativa interpretazione grafica.

VERSO L'ESAME

Il concetto di luogo geometrico e la risoluzione di Quesiti d'Esame sulla determinazione di luoghi geometrici di punti del piano cartesiano note alcune condizioni.

Quesiti d'Esame di Geometria Euclidea.

Problemi d'Esame, dalla matematica alla fisica e viceversa.

EDUCAZIONE CIVICA

Progetto di Orientamento Universitario: Next Generation.

LA SCIENZA A SCUOLA: Ricerca e sviluppo sostenibile. "Matematica ottimale. La bellezza della natura e l'arte del Problem Solving." Alessio Figalli, Politecnico di Zurigo.

Partecipazione alla conferenza "Bioetica e Intelligenza Artificiale" tenuta da Paolo Benanti presso gli OpenLabs dei Laboratori Nazionali di Fisica Nucleare di Frascati.

LIBRO DI TESTO: Zanone, Sasso – COLORI DELLA MATEMATICA Ed. Blu aggiornata – Lic. Scient. Volume GAMMA 3, 4 + TRIGONOMETRIA.

Civitavecchia, 8 giugno 2024

Docente
Prof.ssa Anna Nobili